Sabit Yerçekimi Kuvveti Altında Cisimlere Sabit Süreli Düşüş Sağlayan Eğimli Yüzey

Utkan Güngördü
(http://freeconsole.org/crew/salviati)

7 Temmuz 2007
Sürüm: 1.0

Özet

Nokta cisim ve eylemsizlik momentine sahip olan cisimler için sabit yerçekimi altında sabit sürede düşüş sağlayacak olan eğimli yüzeyin geometrisini belirlendi. Sorunun çözümünde kullanılan harmanlama kuramının Volterra tümlev denklemlerine uygulanabilirliği tartışıldı. Okuyucunun, temel hesap bilgisi olduğu ve Laplace dönüşümüne aşina olduğu varsayılmaktadır. Bunların dışında gerekli olan matematiksel bilgi, eklerde sağlanmaya çalışıldı.

1 Harmanlama Kuramı

Bu kuram, bir Laplace dönüşümünün, diğer iki Laplace dönüşümünün çarpımı şeklinde yazılabilmesiyle ilgilidir. Genel anlamda şunu sorabiliriz: elimizde iki işlev, $f(t)$ ve $g(t)$ olsun. Bu işlevlerin Laplace dönüşümlerinin çarpımı, başka bir işlevin Laplace dönüşümü olarak yazılabilir mi? Yani, eğer $\mathcal{L}$, önüne geldiği şeyin Laplace dönüşümünü gösteriyorsa

$$\mathcal{L}f(t)\mathcal{L}g(t) = \mathcal{L}h(t) \tag{1}$$

denklemine uyan bir $h(t)$ var mıdır? Bunu incelemeye Laplace dönüşümünü açık yazarak başlayalım

$$\left(\int_0^\infty e^{-sy}f(y)dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx\right)$$

Sağdaki tümlev, y veya s üzerinden olmadığı için e^{-sy}'yi tümlevin içine taşıyabiliriz.

$$\left(\int_0^\infty f(y)dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-s(x+y)}g(x)dx\right)$$

$t = x + y$ değişken dönüşümünü yaparak [1]

$$\left(\int_0^\infty f(y)dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-st}g(t-y)dt\right)$$

[1]Sağdaki tümlevde y bir sabit olduğu için $dt = dx$ yazdık.

Eğer alışıldık xy koordinat sistemini çizip, x yerine t yazarsak, bu tümlev, $y = t$ doğrusunun altında kalan alan üzerinden yapılan tümleve denk gelir. Burada tümlev sırasını değiştirirsek

$$\int_0^\infty e^{-st} g(t-y)dt \int_0^t f(y)dy = \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(y)g(t-y)dy \right) dt$$

Bu son ifade gerçekten bir şeyin Laplace dönüşümü!

$$\mathcal{L} \int_0^t f(y)g(t-y)dy$$

Bu 'şeye' $h(t)$ dersek ve bunu (1)'de yerine koyarsak: [2]

$$\mathcal{L}f(t)\mathcal{L}g(t) = \mathcal{L} \int_0^t f(y)g(t-y)dy \tag{2}$$

Bu eşitlik, iki Laplace dönüşümünün çarpımının, her zaman bir başka işlevin Laplace dönüşümü şeklinde yazılabilecegi anlamına gelmektedir. Bu özellik, harmanlama kuramı [3] olarak anılır.

1.1 Volterra Tümlev Denklemleri ve Harmanlama Kuramı

[4]

Eğer $k(x,t)$ ve $f(x)$ bilinen işlevlerse, λ bilinen bir sabitse [5], ve $\phi(x)$ aranan işlevse

$$\phi(t) + \lambda \int_0^t k(x,t)\phi(x)dx = f(t)$$

biçimindeki denklemlere *Volterra tümlev denklemi* denir. Bu tür denklemlerde $k(x,t)$ işlevi, *çekirdek işlevi* olarak anılır. Bu işlevin $k(x,t) = k(t-x)$ biçiminde olduğu özel durum, harmanlama kuramındaki tümlevli tarafı andırmaktadır:

$$\phi(t) + \lambda \int_0^t k(t-x)\phi(x)dx = f(t)$$

Bu tümlev denklemin her iki tarafının da Laplace dönüşümünu alırsak, tümlevli terimi harmanlama kuramı sayesinde iki işlevin Laplace dönüşümlerinin çarpımına çevirerek denklemi daha basit bir ha le dönüştürmeyi umabiliriz:

$$\mathcal{L}\phi(t) + \lambda\mathcal{L} \int_0^t k(t-x)\phi(x)dx = \mathcal{L}f(t)$$

[2]Kapalı halde yazıldığı halde f'yi g'den farklı kılan birşey varmış gibi gözüküyor. Ama $t - y = x$ dönüşümü ile bu ifade

$$\mathcal{L} \int_0^t f(t-x)g(x)dx$$

şeklinde de yazılabilir.

[3]İng. convolution theorem

[4]Bu kısım, kuramın tümlev denklemlere uygulanabilirliğini göstermek icin yazılmıştır. Metnin geri kalanı için gerekli değildir.

[5]Denklemi tekil yapmayan bir sabitten söz ediyoruz tabii ki. Aslında denklem çözüldüğünde λ'yı paydada göreceğiz, ki bu bazı değerleri için tekilliği garantiler.

Harmanlama kuramıyla tümlevi iki Laplace dönüşümünün çarpımına çevirirsek

$$\mathcal{L}\phi(t) + \lambda\mathcal{L}k(t)\mathcal{L}\phi(t) = \mathcal{L}f(t)$$

Buradan $\mathcal{L}\phi(t)$'li terimi çekersek

$$\mathcal{L}\phi(t) = \frac{\mathcal{L}f(t)}{1 + \lambda\mathcal{L}k(t)}$$

Bu denklemde her iki tarafın ters Laplace dönüşümünü alarak $\phi(t)$ için çözüme gidebiliriz [6], ancak biz meselenin bu kısmı ile daha derinlemesine ilgilenmeyeceğiz.

2 Eşsüreli Sorusu

[7]

Öyle bir eğik yüzey olsun ki, bunun üzerindeki herhangi bir noktadan bıraktığımız cisim, hep aynı sürede aşağıya ulaşsın.

Bu koşulu sağlayan eğrinin nasıl olduğu sorusu, evresi hareketinin genliğinden bağımsız olan saat sarkacının yapımında ortaya çıktı. Eşsüreli, Christian Huygens tarafından geometrik yöntemlerle çözüldü. Daha sonra Leibniz ve Jakob Bernoulli, analitik yöntemlerle soruyu çözdü. Bernoulli'nin çözümü, tarihteki ilk türevsel denklem çözümlerinden biriydi.

Bu eğik yüzeyin nasıl bir geometriye sahip olduğunu, enerjinin korunumu ile şu şekilde inceleyebiliriz. Sürtünmesiz eğik düzlemin en alt noktasını merkez alalım ve belli bir yükseklikten bir cismi serbest bıraktığımızı hayal edelim. Cismin yere göre [8] potansiyel enerjisi, bırakılma anında sahip olduğu tüm enerji olduğu için

$$E = mgy_0$$

yazabiliriz. Daha sonraki zamanlarda, cisim aşağı doğru yuvarlanmaya başlayacak, kinetik enerjisi artacak ve potansiyel enerjisi azalacaktır. Ancak sistemde enerji kaybı olmadığı için ikisinin toplamı sabit kalacaktır. Eğer yol üzerindeki sonsuz küçük parçaya ds [9] dersek

$$m\frac{\dot{s}^2}{2} + mgy = E = mgy_0 \tag{3}$$

ya da

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(y_0 - y) \tag{4}$$

yazabiliriz. Bu denklemde her iki tarafın karekökünü alırken, ds/dt'nin işaretine dikkat etmeliyiz. Cisim zaman içinde aşağıya, yani s'nin *azaldığı* yöne doğru

[6] $\lambda \neq -1/\mathcal{L}k(t)$ olduğu sürece.

[7] İng. tautochrone

[8] Burada "yer" derken $y = 0$ düzeyini kastediyoruz.

[9] Eğri üzerindeki küçük parçanın $d\mathbf{s} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y$ olduğuna dikkat edersek $ds^2 = d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s} = dx^2 + dy^2$ olduğunu görürüz. Ya da $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

gitmekte oldugu için ds/dt sıfırdan küçük olur —yani $\sqrt{(ds/dt)^2} = -ds/dt$ yazmalıyız. Denklemden dt'yi çekersek

$$-\frac{ds}{\sqrt{y_0 - y}} = \sqrt{2g}dt \tag{5}$$

$\sqrt{1+(dy/dx)^2}$'ye $f(y)$ dersek, bu denklemi

$$-\frac{f(y)}{\sqrt{y_0 - y}}dy = \sqrt{2g}dt$$

olarak yazabiliriz. Her iki tarafın tümlevi alınır ve sınırlar yazılırsa

$$-\int_{y_0}^{0} \frac{f(y)}{\sqrt{y_0 - y}}dy = \int_0^t \sqrt{2g}dt$$

Sağ tarafın bir sabit olmasını istiyoruz; $\int_0^t dt$'ye t_0 diyelim.

$$\int_0^{y_0} \frac{f(y)}{\sqrt{y_0 - y}}dy = \sqrt{2g}t_0$$

İki tarafın Laplace dönüşümü alındıktan sonra sol tarafa harmanlama kuramını uygularsak

$$\mathcal{L}f(y)\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) = \mathcal{L}(\sqrt{2g}t_0)$$

$$\mathcal{L}f(y)\sqrt{\frac{\pi}{s}} = \sqrt{2g}\frac{t_0}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}f(y) = \sqrt{\frac{2g}{\pi s}}t_0}$$

Her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygulayarak

$$f(y) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} = \mathcal{L}^{-1}\left(\sqrt{\frac{2g}{\pi s}}t_0\right) = \sqrt{\frac{2g}{y}}\frac{t_0}{\pi}$$

elde ederiz. $f(y)$'nin $\sqrt{1+(dy/dx)^2}$ olduğunu hatırlarsak

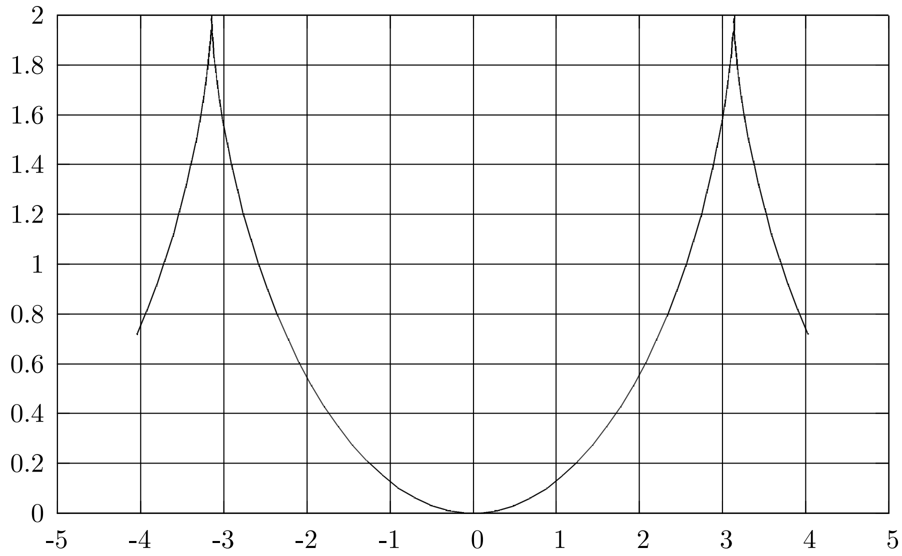
$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\left(\frac{gt_0^2}{\pi^2}\right)\frac{1}{y} = \frac{2C}{y}$$

elde ederiz. Bu denklemi x ve y'li terimleri ayrı tarafa çektikten sonra tümlevleyerek çözebiliriz, ancak bunu yapmayacağız; çünkü bu özel bir geometrik şeklin denklemidir: bir *sarmalsı*nın [10]. Denklemin etkensel [11] çözümü

$$\boxed{x = C(\theta + \sin\theta), y = C(1 - \cos\theta)} \tag{6}$$

dır [12]; burada

[10] İng. cycloid.
[11] İng. parametric.
[12] Bkz. örneğin http://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid



Şekil 1: $C = 1$ için (6)'nın grafiği.

$$\boxed{C = \frac{gt_0^2}{\pi^2}}$$

dir.

3 Eşsürelinin Kaymadan Yuvarlanan Eylemsizlik Momentli Cisimlere Genellenmesi

Şimdi de serbest bırakılan bir cismin nokta cisim değil, bir katı cisim olduğu daha gerçekçi duruma yöneleceğiz. Ancak burada sadece cismin yuvarlanan kısmının dairesel bir kesit olduğu, görece basit olan durumları çözümleceğiz. Yine cismin belli bir yükseklikten bırakıldığını hayal edeceğiz, ancak bu su sefer yüzeyin *sürtünmeli* olduğu, ve bu sayade cismin sürtünmeli yüzey üzerinde kaymadan yuvarlanabildiği durumdaki hareketi inceleceğiz.

Eğik düzlem üzerinden serbest bırakılan cismin eylemsizlik momentinin de hesaba katıldığında, ilk bakışta çözümün baştan yapılması gerektiğini düşünebiliriz. Ancak bu bölümde bunun böyle olmadığını, eski çözüm üzerinde küçük değişiklikler yaparak yeni sorunun çözülebileceğini göstereceğiz. Soruya nokta cisimde olduğu gibi yaklaşarak toplam enerjiyi yazarak başlayacağız. Eğer θ, cismin hareket başlangıcından itibaren döndüğü açıysa, ve yuvarlanan cismin kesit yarıçapın R ise, toplam enerjiyi bu şekilde yazabiliriz:

$$I\frac{\dot{\theta}^2}{2} + m\frac{\dot{s}^2}{2} + mgy = E = mgy_0 \tag{7}$$

Cismin Δt kadar sürede alacağı yol $R\Delta\theta$'dır; $\dot{s} = R\dot{\theta}$ ile (7)'den θ'yı yok edersek

$$\frac{I\dot{s}^2}{2R^2} + m\frac{\dot{s}^2}{2} + mgy = E = mgy_0$$

olur. Biraz düzenleyerek

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left(\frac{I}{mR^2} + 1\right) = 2g(y_0 - y) \tag{8}$$

şekline sokabiliriz. Önceki bölümde nokta cisim için yazdığımız (4) denkleminde g yerine $g/\left(\frac{I}{mR^2} + 1\right)$ yazdığımızda eylemsizlik momentini içeren denklemi elde ediyoruz! Denklemler bir sabite kadar aynı olduğu için çözümleri aynen kullanabiliriz. Öyleyse, eylemsizlik momenti I olan bir cismi bıraktığımızı düşünerek eğik düzlemin eğimini hesaplarsak, bulacağımız çözümler yine (6) 'daki gibi olacak; ancak C artık gt_0^2/π^2 değil, $\left(\frac{I}{mR^2} + 1\right) gt_0^2/\pi^2$ olarak verilecektir. [13]

[13] İlk bakışta cismin boyutlarını sonsuzküçüğe çekince denklemin nokta cisim denklemi olan (4)'e indirgenmesini bekleyebiliriz. Örneğin nokta cismi yarıçapı 0'a giden bir küre olarak hayal edersek $I = (2/5)mR^2$ alıp (8)'i yeniden yazınca

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left(\frac{2}{5} + 1\right) = 2g(y_0 - y)$$

elde ederiz —ki bu yarıçaptan bağımsız bir sonuçtur. Nokta cismin eylemsizliğini, onu yarıçapı 0'a giden bir küre olarak hayal ettiğimizde 7/5 katına çıktı! Daha da kötüsü, yuvarlanan cismi yarıçapı ve kalınlığı sonsuzküçük olan bir cisim olarak hayal edersek (8)'in nokta cisim "sürümü"

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + 1\right) = 2g(y_0 - y)$$

haline gelir! Ve farklı geometriler seçerek nokta cisim için bundan başka bir çok denklem daha uydurabiliriz! Bu görünürdeki çelişkinin —elbette Doğa'da çelişki yoktur, bu tür çelişkiler her zaman bizim çelişkili yorumlarımızdan kaynaklanır— nedeni iki düzeneğin aynı yapıya sahip olmamasıdır. Cismin dönmesinden sorumlu dönüyü sağlayan sürtünme kuvveti, nokta cisimli çözümde *yoktu*. Bu yüzden *dönen* katı cisim denkleminin *kayan* nokta cisim denklemine indirgenmesini beklememeliyiz.

A Gauss Tümlevi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = ???$$

Bu tümlevin değerini hesaplamak için şöyle bir hile vardır:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

Bu tümlevi kutupsal koordinatlarda yazalım, yani $x^2 + y^2 = r^2$, $dxdy = rd\theta dr$. Kutupsal koordinatlarda tüm uzayı taramak için sonsuz bir yarıçapla 0'dan 2π'ye döneriz:

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} re^{-r^2} d\theta dr = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi$$

Ya da $I = \sqrt{\pi}$ elde ederiz. Eğer tümlev

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

şeklinde verilmişse, $\sqrt{a}x = \chi$ değişken dönüşümü ile tümlevi eski haline benzetebiliriz.

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\chi^2} d\chi = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Eğer tümlevin alt sınırı $-\infty$ yerine 0 ise, tümlevin çift işlev üzerinden yapıldığını, yani

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-ax^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

yazabileceğimizi fark edip ilk tümlevi ayırıp yazarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-ax^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ya da

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

elde ederiz.

B Bazı İşlevlerin Laplace Dönüşümleri

Metin boyunca kullanılan bazı Laplace dönüşümlerini, tamlık açısından burada veriyoruz.

Bir sabitin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}C = \int_0^\infty e^{-st} C dt = C \left(-\frac{1}{s} \right|_0^\infty = \boxed{\frac{C}{s}}$$

$1/\sqrt{t}$'nin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\frac{1}{\sqrt{t}} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$t = u^2$ dönüşümü ile

$$2 \int_0^\infty e^{-su^2} du = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{s}}}$$

$1/\sqrt{s}$'nin ters Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{\sqrt{s}} = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{L} \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}}$$