

Lagrange Mekanikine Temel Bir Giriş

Utkan Güngördü

(<http://freeconsole.org/crew/salviati>)

7 Temmuz 2007

Sürüm: 1.0

Özet

Mekanikçe giriş noktası olarak tarihsel gelişimine koşut deneysel Newton yasaları yerine en az eylem ilkesi olarak seçildi ve Newton mekaniğine eşdeğerliliği gösterildi. Lagrange mekaniği ile Nöther'in kuramı tartışıldı. Newton yasaları ve geri kalan korunum yasaları buradan "türetildi". Daha sonra doğrusal ivmeli ve dönme hareketi yapan gözlem çerçevelerinde ortaya çıkan etkiler incelendi.

1 En Az Eylem İlkesi

Bir cisimi fırlattığımızda biraz yukarı gider ve sonra da aşağı düşer. İzlediği yol herhangi bir yol değildir. Ama o yolu "herhangi" ya da "özel" yapan şey nedir? Elbette "herhangi" bir yol, Newton yasalarına uymak zorunda değildir. Rastgele seçtiğimiz bir yolu ikinci yasada yerine koyarsak, kuvvetle yolun zamana göre ikinci türevi arasında bir eşitlik olmaz. Ancak bu soruya yanıt vermenin başka bir yolu daha vardır.

Bir cisim belli bir sürede bir noktadan başka bir noktaya gidiyor. Cismin izlediği yol boyunca her an kinetik enerjisini hesaplar, bundan potansiyel enerjisini çıkarırsak, ve bunu tüm yol boyunca zaman üzerinden tümleverssek bir sayı buluruz. Şimdi, başka bir yol çizersek —aynı noktalar arasında, aynı sürede kat edilecek, farklı bir yol— ve aynı şeyi bu yol üzerinden hesaplırsak bulacağımız sayı her zaman daha *büyük* çıkar¹.

Öyleyse bu tümlemin en küçük değerinin ne anlama geldiğine bakalım. Matematiksel sorumuz, bu tümlevi en küçük yapacak $x(t)$ işlevini bulmak. (Tümlemin sonucunda hesaplanan sayıya *eylem*, S , denir.)

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(m \frac{\dot{x}^2}{2} - V(x) \right) dt \quad (1)$$

Hesapta² bir işlevin en küçük değerini bulmak için kullanılan hile şudur: en küçük değerden *birinci* mertebe mesafe kadar uzaklaşırsak, işlevdeki ilk sapma *ikinci* mertebeden olur³. Şu anda bir *işlevi* en küçük yapan *noktayı* değil,

¹Aslında bunun tam tersi de olabilir. Diğer yollar için bu sayı her zaman *küçük* de çıkabilir. Matematiksel olarak tek istediğimiz bunun bir ekstremum noktası olması olacak. Ancak tarihsel nedenlerden dolayı ilkenin adı hâlâ en az eylem ilkesidir.

²İng. calculus.

³Yani seri açılımındaki birinci mertebe terimin katsayısı olan df/dx yok olur.

bir *tümlevi* en küçük yapan *işlevi* arıyor olsak da, hileyi aynen kullanabiliriz: en küçük olma koşulunu sağlayan işlev $x(t)$ olsun, bunda birinci merteben sapma da $\delta x(t)$ olsun. Bu yeni işlevle hesaplanacak yeni eylemden, eski, en küçük eylemi çıkardığımızda birinci mertebeden değişimin sıfır olması lazım.⁴

$$S' = \int_{t_0}^{t_1} \left(m \frac{(\dot{x} + \delta\dot{x})^2}{2} - V(x + \delta x) \right) dt$$

Birinci mertebeden değişimin sonucuyla ilgilendiğimiz için, $V(x + \delta x)$ 'i seriye açıp, tümlev içinde ikinci ve daha yüksek mertebeden terimleri atarak

$$S' = \int_{t_0}^{t_1} \left(m \frac{\dot{x}^2 + 2\dot{x}\delta\dot{x}}{2} - V(x) - \delta x \frac{dV}{dx} \right) dt$$

yazarız. Bundan S' 'yi çıkarırsak

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(m\dot{x}\delta\dot{x} - \delta x \frac{dV}{dx} \right) dt$$

gelir. Eğer $\delta\dot{x}$ yerine δx 'li bir şeyler yazabilseydik, her ikisini de parantez dışına atabilirdik. Tümlevin zaman üzerinden olduğuna dikkat ederek kısmi tümlevle zaman türevinden kurtulabileceğimizi fark ediyoruz: ilk terimi kısmi tümlevle yeniden yazarsak

$$\int_{t_0}^{t_1} m\dot{x}\delta\dot{x} dt = m\dot{x}\delta x \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m\ddot{x}\delta x dt$$

Uç noktalarda δx yok olduğundan tümlevlenen ifade sıfıra eşit olur. Bunu $\delta S'$ 'de yerine yazarsak

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(-m\ddot{x} - \frac{dV}{dx} \right) \delta x dt$$

Böyle bir şeyin her zaman sıfır olması için tümlevlenen ifadenin sıfır olması gerekir:

$$-m\ddot{x} - \frac{dV}{dx} = 0$$

ki bu, $F = ma$ dır. Böylece en az eylem ilkesinin, bildiğimiz mekanik yasalarına denk olduğunu söyleyebiliriz —en azından bir potansiyelle tanımlanabilen kuvvetin etkisinde hareket eden⁵ küçük bir cisim için.

1.1 Değişimler Hesabı

⁶ Ya kinetik enerji eksi potansiyel enerji, $m\dot{x}^2/2 - V$ şeklinde değilse? Örneğin cismin bir eylemsiz momenti varsa ya da daha farklı hareket eden çeşitli parçalardan oluşuyorsa? Hız, konum ve genel anlamda zamana da bağlı olabilecek bu ifadeyi $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$ ile gösterelim (bu işlevin adı, onu ilk kez tanımlayan Lagrange'ın adıyla anılır). Öyleyse eylemi

⁴Yeni yol da aynı noktadan harekete başlayıp aynı noktada son bulduğu için ek terim δx , bu yerlerde yok olur; yani $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$.

⁵Diğer bir deyişle *korunumlu kuvvetin* etkisinde.

⁶İng. calculus of variations.

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) dt$$

olarak kapalı ve genel biçimde yazabiliriz. Birinci mertebeden değişim için x yerine $x + \delta x$ yazıp eylemdeki değişime bakarsak

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt \quad (2)$$

buluruz. Daha önceden yapığımız gibi zaman türevinden kurtulmak için kısmi tümlevi kullanırsak

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt$$

Yani genel anlamda verilen bir \mathcal{L} işlevi için

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0} \quad (3)$$

Bu denklemin adı *Euler-Lagrange denklemi*dir. (Euler, denklemi matematiksel bir soru için yazmıştı, onu mekanikte bu şekilde kullanan ilk kişi Lagrange idi.). Eğer \mathcal{L} , birden fazla koordinat içeriyorsa, örneğin $\mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, t)$ ise, (2)'de y 'den kaynaklanan değişimleri yazıp $\delta \dot{y}$ 'yi kısmi tümlevle ayırdıktan sonra δy 'nin katsayısını sıfıra eşitleyerek ikinci bir Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

yazabiliriz. $-\partial \mathcal{L} / \partial x$ teriminin x yönünde etkiyen kuvvet olduğuna dikkat edersek, tam zaman türevi alınan ifadenin anlamı, bu kuvvet yüzünden zamanla değişen şey...yani momentum? Bu, kartezyen koordinatlarda *bir* cisim için momentumun x bileşeni $m\dot{x}$ —bunu $m\dot{x}^2/2 - V$ Lagrange işlevinin \dot{x} 'ya göre kısmi türevini alıp gösterebiliriz. Ya Lagrange işlevini küresel koordinatlarda yazsaydık? O zaman θ 'ya göre kısmi türev, $m r^2 \dot{\theta} = p_\theta$, açısal momentuma denk gelir. Yine de bu, F_x yüzünden zamanla değişime uğrayan şeyi — x koordinatıyla ilgili bir tür momentumu temsil ediyor, bu yüzden ona *x koordinatının eşlenik momentumu* diyeceğiz.

1.2 Lagrange İşlevinde Mekanik İçeriği Bozmadan Yapılabilecek Değişikler

Öyleyse bir sistemin mekanik özelliklerini belirleme sorunu, temel olarak uygun bir gözlem çerçevesi seçip Lagrange işlevini yazabilmeye indirgenmiştir. Euler-Lagrange denklemi, yazdığımız Lagrange işlevinden hareket denklemini üretir —sonrası tekdüze matematiktir: bir türevsel denklemin ⁷ çözümü. Sorunun fiziksel içeriği Lagrange işlevinde olsa da, hareket denklemini Euler-Lagrange denklemini yazdıktan *sonra* elde ediyoruz.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

⁷İng. differential equation.

Şunu merak edebiliriz; aynı hareket denklemini veren birden fazla Lagrange işlevi var mıdır? Euler-Lagrange denklemini biraz inceleyince şunu fark ediyoruz: Lagrange işlevi, her zaman türevleniyor... Öyleyse, neden bir sabit eklemiyoruz? Böylece aynı fiziği temsil eden *birden fazla* Lagrange işlevinin yazılabileceğini keşfediyoruz. $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + C$ işlevi, eski \mathcal{L} kadar “iyi”. Bunun yanı sıra, bir katsayı, türevlerin dışına alınabileceğinden Lagrange işlevinin bir sabitle çarpıldıktan sonra da yine “iyi” bir Lagrange işlevi olduğunu görüyoruz.

Lagrange işlevinde pek de aşıkarmayan bir değışiklikten daha söz etmek istiyoruz. Bu sefer, Euler-Lagrange denklemindeki değışmezliğı değıl, en az eylem ilkesinde “u noktalarda δx 'in kaybolması”nı kullanacağız. Lagrange işlevine koluma ve zamana bağılı bir işlevin tam zaman türevini eklediğimizi düşünelim. Yeni eylemdeki değışimde

$$\delta S' = \delta \int \left(\mathcal{L} + \frac{df(x, t)}{dt} \right) dt$$

ilk terim, zaten “iyi” bir Lagrange işlevi olduğı için düşer. İkinci terimde değışimi açıkça yaparsak

$$\delta S' = \int \frac{df(x + \delta x, t)}{dt} dt - \int \frac{df(x, t)}{dt} dt = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x \right) dt$$

elde ederiz. Ama δx sınırlarda yok olduğundan sıfıra eşit olur, dolayısıyla yeni Lagrange işlevi, eskisi kadar iyidir. QED.

Öyleyse, şu ana kadar bulduğumuz en genel değışiklik $\mathcal{L}' = \alpha \mathcal{L} + df(x, t)/dt + C$ oldu; bu işlev, eski \mathcal{L} kadar “iyi” dir.

2 Nöther’in Kuramı ve Korunum Yasaları

Bir sistemin dinamik değışkenlerinin oluşturduğu bir ifade zaman içinde değışmiyorsa, ona *hareket sabiti* denir, ve o niceliğın korunduğı söylenir. Nöther’in kuramı, Lagrange işlevindeki bir simetriden korunan bir nicelik bulmayı garantiler⁸. Şimdi en ünlü simetrilere bazılarını ve bunların sonuçlarını tartışacağız, ancak tartışmayı temel ve sade tutmak ve esas ilgilendiğimiz konudan fazla uzaklaşmamak için tek (en fazla 2) boyutta nokta cismin mekaniğini göz önüne alacağız.

2.1 Uzay Ötelemeleri

Eğer bir Lagrange işlevi uzaysal ötelemeler altında sabit kalıyorsa, δx ötelemesi yaptığımız zaman Lagrange işlevi değışmez. Yani

$$\mathcal{L}(x + \delta x, \dot{x}, t) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)$$

yazabiliriz. Eğer δx yeterince küçükse, sol tarafı seriye açıp ikinci ve daha yüksek mertebeden terimleri atıp δx 'in katsayısını yazarsak $(\partial \mathcal{L} / \partial x) = 0$ elde ederiz. Euler-Lagrange denklemiyle buna eşdeğer olarak

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

⁸Kuramın genel halini incelemeyeceğiz, ancak esasen bu bölümde izlenen yöntemin genellemesidir.

olur. $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}$ yerine p_x yazarsak $dp_x/dt = 0$ elde ederiz. Bu işlemler $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ için 3 kez tekrarlanırsa

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0}$$

Lagrange işlevi öteleme simetrisine sahipse, momentum korunur.

2.2 Zaman Ötelemeleri

Lagrange işlevi zaman ötelemeleri altında sabit kalıyorsa, küçük bir δt ötelemesi yaparak seri açılımı yapıp δt 'nin katsayısının yok olması koşulunu inceleriz:

$$0 = \mathcal{L}(x, \dot{x}, t + \delta t) - \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta t \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

Bu haliyle çok fazla anlamı yokmuş gibi gözükse de

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\ddot{x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

açılımından son terimi çekip Euler-Lagrange denklemini kullanarak yeniden yazabiliriz:

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)\dot{x} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\ddot{x} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\dot{x}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

$$-\frac{d}{dt}(p_x\dot{x} - \mathcal{L}) = -\frac{d}{dt}\left(m\frac{\dot{x}^2}{2} + V\right) = -\frac{dE}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

Artık daha anlamlı duruyor: Lagrange işlevinin zamana göre kısmi türevi, enerjinin zamanla değişiminin eksilisidir. Böylece zaman simetrisinin anlamının

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = 0}$$

olduğunu görüyoruz. *Lagrange işlevi zaman simetrisine sahipse, enerji korunur.*

2.3 Uzay Döndürmeleri

Şimdi de Lagrange işlevinin uzayda dönüşler altında değişmez olduğu durumların ne gibi sonuçları olduğunu inceleyeceğiz. Gözlem çerçevesini z eksenini etrafında $\delta\theta$ kadar döndürürsek yeni konum

$$x' = x \cos \delta\theta - y \sin \delta\theta$$

$$y' = y \cos \delta\theta + x \sin \delta\theta$$

olur. Küçük bir $\delta\theta$ seçip $\sin \delta\theta \approx \delta\theta$ ve $\cos \delta\theta \approx 1$ yazarsak dönüşümü basitleştirebiliriz.

$$x' = x - y\delta\theta$$

$$y' = y + x\delta\theta$$

Lagrange işlevinin bu dönüş altında değişmemesi

$$\mathcal{L}(x - y\delta\theta, y + x\delta\theta, \dot{x} - \dot{y}\delta\theta, \dot{y} + \dot{x}\delta\theta, t) = \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$$

anlamına gelir. Sol tarafı seriye açarak

$$0 = \delta\theta \left(x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \dot{y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)$$

yazarız. Bu, $\delta\theta$ 'nın katsayısının yok olma koşuludur. Euler-Lagrange denklemiyle

$$0 = \left(x \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - y \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) + \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \dot{y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)$$

haline getirince, parantez içindeki ifadenin bir şeyin tam zaman türevi olduğu görünür hale gelir —ki bu bir korunum yasası daha bulduk anlamına geliyor:

$$0 = \frac{d}{dt} \left(x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)$$

ya da

$$0 = \frac{d}{dt} (xp_y - yp_x) = \frac{d}{dt} L_z$$

Parantez içindeki ifade, açısal momentumun z bileşeni olarak adlandırılır. Eğer Lagrange işlevi x eksenine etrafındaki dönmelerden de etkilenmiyorsa, benzer işlemlerle L_x 'in de zamanla korunduğu bulacaktık. Öyleyse döndürmelerden tamamen bağımsız bir Lagrange işlevi için açısal momentumun tüm bileşenleri korunacaktır:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0}$$

Lagrange işlevi dönme simetrisine sahipse, açısal momentum korunur.

3 Newton Yasaları

3.1 Galileo'nun Görelilik İlkesi

Mekanik olguları matematiksel olarak incelemek için öncelikle bir gözlem çerçevesine —ki denklemleri ona göre yazabilelim— ihtiyacımız var. Ama hangi gözlem çerçevesi doğrudur? ⁹ Ya da böyle bir sorunun anlamı var mıdır?

Şimdi uzayın türdeş ¹⁰ ve eşbakışumlu ¹¹ olmasının, yani Lagrange işlevinin uzaysal ötelemeler altında değişmez olmasının sonuçlarını tartışacağız. Bu elbette gerçek anlamda görelilik ilkesinin bir “türetme”si olamaz, çünkü boş uzayın türdeş olduğu; hiç bir yerden türetmediğimiz, tartışmaya elle koyduğumuz bir

⁹Bu soru, görüldüğünden daha derindir. Fizikçilerin böyle bir gözlem çerçevesinin teklifine inandığı bir dönem gerçekten vardı —o çerçevenin adı Esir'di.

¹⁰İng. homogeneous.

¹¹İng. isotropic.

varsayım. Ancak bu varsayım incelemeye değer, çünkü birazdan da göreceğimiz gibi bu aslında görelilik ilkesinin kökenleri ile doğrudan bağlantılı bir olgu.

Türdeş uzay derken, evrendeki bir konumu diğerinden ayırmanın bir yolu olmadığını kastediyoruz. Tüm fiziksel olgular evrenin her yerinde aynıdır, ve yapılan deneylerin sonuçları, nerede yapıldıklarından bağımsızdır. Bu, matematiksel olarak Lagrange işlevinde konumu içeren herhangi bir ifadenin yer alması, dolayısıyla potansiyel teriminin olmaması¹² anlamına gelir¹³. Böylece uzaydaki ötelemelerde potansiyel değişmez ($\partial V/\partial x = 0$) —başka bir deyişle cisimler üzerinde herhangi bir kuvvet oluşmaz¹⁴.

Böyle bir uzaydaki parçacığın hareket denklemi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(mv_i^2/2)}{\partial v_i} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{v_i = \text{bir sabit.}}$$

der.¹⁵ Yani, eğer cisim üzerinde herhangi bir kuvvet yoksa, cismin hızının tüm bileşenleri zaman içinde sabittir. Ya da, eğer cismin hızı zamanla değişiyorsa üzerinde bir kuvvet vardır ve içinde bulunduğu uzay türdeş değildir. Ayrıca hareket denklemi, bu sabitin değerinden bağımsız olduğu için onu belirlemenin deneysel bir yolu da yoktur: *sabit hızla doğrusal hareket eden bütün gözlem çerçeveleri, mekanik anlamda eşdeğerdir ve birbirlerinden ayırt edilemezler*. Bu, *görelilik ilkesidir*.

3.2 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Belli bir potansiyel altındaki küçük bir cismin yapacağı hareketi en az eylem ilkesiyle belirleyeceğiz. Konuma bağlı, keyfi bir potansiyel altında m kütleli parçacık için Lagrange işlevi $m\dot{r}^2/2 - V$ 'yi Euler-Lagrange denkleminde soktuğumuzda¹⁶

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(m\dot{r}^2/2 - V)}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial(m\dot{r}^2/2 - V)}{\partial x_i} = 0$$

ya da

$$m\ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$$

elde ederiz. $-\partial V/\partial x_i$ yerine F_i yazarsak

$$\boxed{F_i = m\ddot{x}_i} = \dot{p}_i \quad (4)$$

şeklini alır —denklemin bu hali, *Newton'ın ikinci yasası* olarak bilinir.¹⁷

¹²ya da bir sabite eşit olması

¹³En azından “basit” bir Lagrange işlevi için.

¹⁴Potansiyel işlevi, $-\partial V/\partial x = F_x$ koşulunu sağlayacak işlev olarak *tanımlanmış* şeydir.

¹⁵Bu, momentumun sabit olduğu anlamına da gelmektedir.

¹⁶Burada x_i , Lagrange işlevinin yazılışı 3 koordinattan i 'ncisidir. Örneğin kartezyen koordinatları kullanıyorsak $\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ yazıp her koordinat için bir Euler-Lagrange denklemi yazabiliriz: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

¹⁷(4)'ü yazarken Einstein toplama geleneği kullandık. Denklemin yöneyli hali $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \dot{\mathbf{p}}$ 'dir.

3.3 Etki-Tepki Yasası

Diğer cisimlerden yeterince uzaklaştırılmış iki kütleli düşünelim. Eğer bu iki cisim olmasaydı, uzay türdeş olacaktı. Bu iki cismi türdeş uzayda hareket eden bir sistem olarak hayal edersek, sistemin Lagrange işlevinin uzaysal ötelemeler altında değişmediğini, dolayısıyla momentumunun zaman içinde sabit kaldığını söyleyebiliriz. Ama sisteme yakından bakınca, iki kütleli birbirlerine kuvvet uyguladıklarını görüyoruz. İlk bakışta bu kuvvetlerin *herhangi* bir yapıya sahip olacağını düşünebiliriz, ne de olsa aralarındaki potansiyeli bilmiyoruz — cisimlerin birbirlerini itip-çekmesi herhangi bir şekilde olabilir. Ancak uzayın türdeşliği, iki cismin momentumlarının toplamının sabit kalmasını gerektiriyor. Kuvvetler, momentumların zaman içindeki evrimini belirlediği için o kadar da keyfi olamayacaklarını anlıyoruz. Aslında, ilk cismin momentumuna \mathbf{p}_1 ve ona etkiyen kuvvete \mathbf{F}_1 der ve toplam momentumun zamanla değişimini yazarsak

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

iki kuvvetin birbirlerine $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ ile bağlı olduğunu görürüz.

4 Eylemli Gözlem Çerçeveslerinde Lagrange İşlevi

18

Bunu iki aşamada yapacağız. İlki, eski dostumuz eylemsiz gözlem çerçevesine göre doğrusal bir ivmeyle hareket eden gözlem çerçevesinde Lagrange işlevini belirlemek. Bu ivmeden kaynaklanan hız farkı $\mathbf{u}(t)$ olsun. Hızlar arasındaki ilişki

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 - \mathbf{u}$$

Bunu eylemsiz gözlem çerçevesindeki Lagrange işlevinde yerine yazarsak

$$\mathcal{L} = m \frac{v'^2}{2} + m \mathbf{v}' \cdot \mathbf{u} + m \frac{u^2}{2} - V$$

u^2 yalnızca zamana bağlı bir işlev olduğu için Lagrange işlevinden düşürülebilir. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$ yerine ise $d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}')/dt - \mathbf{r}' \cdot d\mathbf{u}/dt$ yazabiliriz ve yine tam zaman türevini düşürürsek Lagrange işlevi

$$\mathcal{L} = m \frac{v'^2}{2} - m \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}' - V$$

olur ($\mathbf{A} = \dot{\mathbf{u}}$). Şimdi de ivmeli gözlem çerçevemize göre Ω açısal hızıyla dönen bir gözlem çerçevesinde Lagrange işlevini yeniden yazarsak ($\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \Omega \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{u} - \Omega \times \mathbf{r}$)

$$\mathcal{L} = m \frac{v^2}{2} + m \mathbf{v} \cdot \Omega \times \mathbf{r} + \frac{m}{2} (\Omega \times \mathbf{r})^2 - m \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} - V$$

Euler-Lagrange denklemi ile hareket denklemi

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} - m \mathbf{A} + m \Omega \times (\mathbf{r} \times \Omega) + 2m \dot{\mathbf{r}} \times \Omega + m \mathbf{r} \times \dot{\Omega}$$

¹⁸Bu kısımda tekdüze olan ara işlemler, yöney cebirinin uzunluğu yüzünden yazılmadı.

olur. $-m\mathbf{A}$ ifadesi, ileri doğru ivmelenen bir arabadaki yolcunun hissettiği geri itmeden sorumludur. $m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega})$ ifadesi *merkezkaç kuvvetidir*, dönen gözlem çerçevelerinde hissedilen dışa doğru itmeden sorumludur. $2m\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\Omega}$ ifadesi *Coriolis kuvvetidir*, ve dönen bir gözlem çerçevesinde dışarı doğru ilerlerken hissedilen yana doğru itmedir. $m\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}$ ifadesi ise *Euler kuvvetidir*, ve dönme hareketinin değişiminden kaynaklanır, Coriolis kuvvetine benzer bir şekilde eylemli gözlemcinin yana doğru bir itme hissetmesini sağlar.

A Korunumlu Kuvvet

Korunumlu kuvvet demekle, sistemi bir durumdan başka bir duruma geçirip sonra da eski durumuna geri getirdiğinde sistemin enerjisini değiştirmeyen kuvvetleri kastediyoruz. Bu koşulu sağlayacak kuvvetler nasıl olmalıdır? Şunu deneyebiliriz: bir parçacığa etkiyen bir kuvvet olsun, bu kuvvet parçacığı bulunduğu yerden itmeye başlayıp biraz dolaştırdıktan sonra aynı yere getirsin. Eğer parçacığın enerjisinde değişim yoksa kuvvet korunumludur. Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olduğu için toplam enerjideki değişim, kinetik enerjideki değişimdir, yani

$$\Delta E = \Delta T = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0???$$

19

Öyleyse sorumuz, matematiksel olarak, bu denklemi sağlayan yöneyin ne gibi bir şey olduğunu belirlemek. Yukarıdaki çizgi tümlevini alan tümlevi olarak tekrar yazarsak ²⁰

$$\int_{\mathcal{A}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

elde ederiz. Bu tümlev, kenarları Γ yolu üzerinden geçen *herhangi* bir alan üzerindedir. Tümlev yüzeyini istediğimiz gibi değiştirebiliyorsak, böyle bir tümlevin her zaman sıfıra eşit olabilmesi için tümlevlenen ifadenin her zaman sıfır olması gerekir: dönümlü²¹ her zaman sıfır olan bir işlev arıyoruz. Bir bayırgının²² dönümlü her zaman sıfır olduğundan ²³ \mathbf{F} 'nin, bir şeyin bayırgısı olduğu sonucuna varıyoruz.

Matematiksel olarak, eğer

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0$$

ise, her zaman

$$\nabla f = \mathbf{F}$$

¹⁹Tümlev işaretinin üzerindeki küçük yuvarlağı tümlevin kapalı bir yol üzerinden hesapladığımızı hatırlatması için koyduk.

²⁰Stokes kuramının güzel bir anlatımını *Feynman Lectures on Physics, Vol. II, kısım 3-5 ve 3-6*'dan okuyabilirsiniz.

²¹İng. curl.

²²İng. gradient.

²³Herhangi bir f için $\nabla \times \nabla f$ 'nin her zaman sıfıra eşit olduğu, tüm bileşenleri hesaplayarak gösterilebilir. z bileşeni için, örneğin, $(\partial/\partial x)(\partial f/\partial y) - (\partial/\partial y)(\partial f/\partial x)$ yazarız; kısmi türevlerin sıraları değişebileceğinden z bileşeninin sıfıra eşit olduğu sonucuna varırız.

şeklinde bir f vardır. Bizim işlevimiz enerji birimindedir ve parçacığın kinetik enerjisinin artımından sorumludur. Aslında (1) noktasından (2) noktasına giden bir parçacık için ²⁴

$$T(2) - T(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(2) - f(1)$$

olarak yazınca, “bir şeylerin toplamının değişmemesi” şeklinde bir gösterim istiyorsak $V = -f$ olan bir işlev tanımlayarak bu denklemin yeniden yazarsak

$$T(1) + V(1) = T(2) + V(2)$$

T ve V ’nin toplamları hep aynı kalır diyebiliriz. Ya da, bir parçacığın enerjisinin korunması için etki eden kuvvetin $\mathbf{F} = -\nabla V$ koşuluna uyan bir yönsüzden²⁵ türetilmiş olması gerekir.

Ancak şunu da eklemeliyiz ki, korunumlu kuvvetin bu ifadesi, enerjinin sadece parçacıklarda olduğu durumlarda iyi olsa da, genel anlamda doğru değildir. Örneğin birim yüke etkiyen Lorentz kuvvetinin kapalı bir yol üzerinden çizgi tümlevi sıfır değildir:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

Maxwell yasasıyla $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, diğer terim ise $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{r}) = 0$ ’dır. Geriye sadece Faraday terimi kalır:

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0 \text{ (genel anlamda)}$$

ancak yine de elektrodinamikte enerjinin korunduğu gösterilebilir ²⁶. Buradaki “ikilem”in nedeni, parçacıkların enerjisinin, ortada bulunan tüm enerji olmamasıdır —elektrik ve magnetik alanlarda saklanan enerji de göz önüne alındığında toplam enerjinin değişmediği görülür.

²⁴

$$\int_{(1)}^{(2)} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

çizgi tümlevinde, eğer f , sadece konuma bağlı bir işlevse

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

olduğu için bu tümlevin sonucu

$$\int_{(1)}^{(2)} df = f(2) - f(1)$$

dir. Başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise, beklediğimiz gibi tümlevin sonucu sıfır olur.

²⁵İng. scalar.

²⁶Poynting’in kuramı.